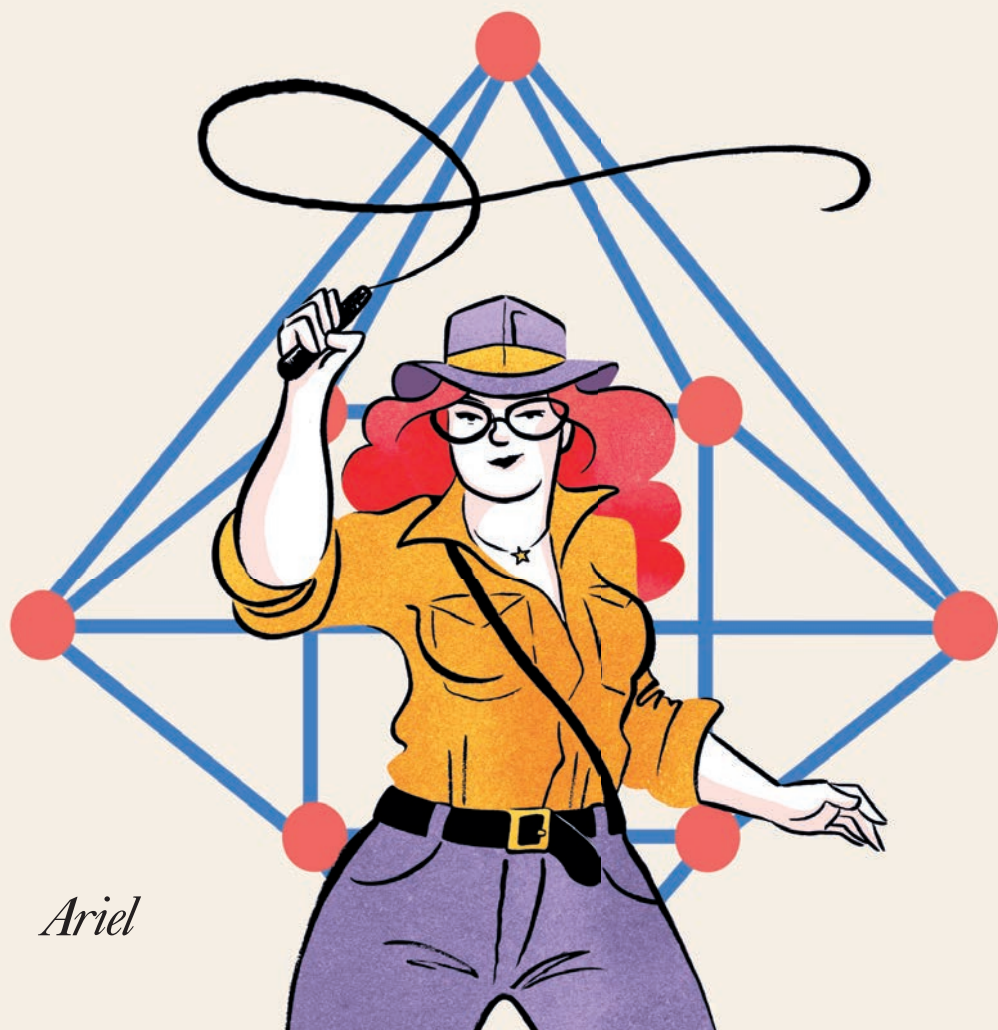


Clara Grima

EN BUSCA DEL  
**GRAFO**  
**PERDIDO**

Matemáticas con puntos y rayas



*Ariel*

Clara Grima

EN BUSCA  
DEL GRAFO  
PERDIDO

Matemáticas  
con puntos y rayas

Ilustraciones de  
Raquel Gu

*Ariel*

Primera edición: noviembre de 2021

© 2021, Clara Grima

© 2021, Raquel García Ulldemolins, por las ilustraciones

Derechos exclusivos de edición en español:

© Editorial Planeta, S. A.

Avda. Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona

Editorial Ariel es un sello editorial de Planeta, S. A.

[www.ariel.es](http://www.ariel.es)

ISBN: 978-84-344-3243-7

Depósito legal: B. 16.492-2021

Impreso en España

El papel utilizado para la impresión de este libro está calificado como papel ecológico y procede de bosques gestionados de manera sostenible.

No se permite la reproducción total o parcial de este libro, ni su incorporación a un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, sea este electrónico, mecánico, por fotocopia, por grabación u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito del editor. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (Art. 270 y siguientes del Código Penal).

Dirijase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Puede contactar con CEDRO a través de la web [www.conlicencia.com](http://www.conlicencia.com) o por teléfono en el 91 702 19 70 / 93 272 04 47.



# SUMARIO

<i>Introducción</i>	<b>13</b>
1. El guateque	<b>23</b>
2. La verbena de la paloma	<b>32</b>
3. Casi famosos	<b>47</b>
4. El apartamento	<b>57</b>
5. <b>Matrix</b>	<b>79</b>
6. Love Actually	<b>103</b>
7. Un monstruo viene a verme	<b>120</b>
8. Dentro del laberinto	<b>131</b>
9. Jungla de cristal	<b>145</b>
10. El cartero	<b>168</b>
11. Amanece, que no es poco	<b>190</b>
12. El puente sobre el río Kwai	<b>205</b>
13. Alicia a través del espejo	<b>221</b>
14. Joker	<b>242</b>
15. Madagascar	<b>259</b>
16. Evasión o victoria	<b>272</b>
17. El diablo viste de Prada	<b>285</b>

18. Casino Royale	<b>299</b>
19. Historias de San Valentín	<b>312</b>
20. Siete novias para siete hermanos	<b>321</b>
21. Grease	<b>334</b>
22. La cortina de humo	<b>344</b>
23. El Señor de los Anillos	<b>354</b>
<i>Agradecimientos</i>	<b>365</b>
<i>Bibliografía</i>	<b>367</b>

# 1

## EL GUATEQUE

Queremos darte una bienvenida festiva al apasionante y divertido mundo de la Teoría de Grafos. Pasa sin llamar, sin miedo: te estábamos esperando.

En este guateque vas a conocer a gente muy interesante. No olvides saludarlos a todos, ¿eh? Tú eliges si con un casto beso o con un cordial apretón de manos.

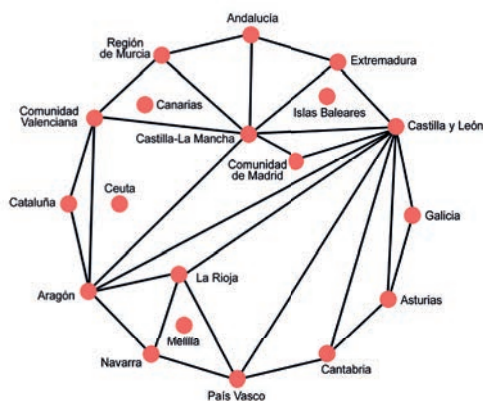


Como habrás leído en la introducción (así lo espero, porque me la he currado mucho), este es un libro sobre grafos. Más adelante daremos una definición formal de estos objetos, pero por ahora vamos a pensar que un grafo es un objeto matemático formado por dos conjuntos. El primer conjunto lo forman unos elementos que llamaremos vértices o nodos y que representaremos con puntos. Los elementos del segundo conjunto son parejas formadas con dos elementos del primero según alguna propiedad que definamos; a estas parejas les llamaremos aristas y las representaremos con un segmento (una raya) que une los dos puntos correspondientes a los miembros de dicha pareja.

Pero, en principio, un grafo no tiene por qué dibujarse para existir. Un grafo, en general, es una idea abstracta que está ahí aunque no la veamos, aunque no la dibujemos. Reconozco que esto último me ha quedado un pelín Coelho. Podemos pensar, por ejemplo, en el siguiente grafo: los vértices (o nodos) serían los lectores de este libro, y las aristas serían las parejas de lectores que se conocen entre ellos y que podemos representar dibujando una rayita que los una. Ese grafo existe y está ahí, flotando en el aire. Los afortunados lectores de este libro van caminando por la calle o están sentados en sus casas leyendo, ajenos, posiblemente, al hecho de que una arista los une de forma imperceptible a aquellos de sus amigos que también leyeron esta egregia obra. No hace falta dibujarlo, pero lo podríamos representar, como hemos dicho, con puntos y rayas. No vamos a hacerlo porque serían demasiados puntos y el dibujo no sería claro.

Elijamos otro grafo más pequeño. Los vértices serán las comunidades y ciudades autónomas españolas y las aristas

las formarán las parejas de comunidades autónomas que, por ejemplo, compartan un tramo de frontera. Sí, tendremos cuatro puntos aislados: Ceuta, Melilla, Canarias e Islas Baleares serían puntos (vértices) aislados en este grafo, porque no comparten frontera con ninguna comunidad autónoma.



Como vemos en la ilustración, podemos representar la relación «ser fronteriza» sin necesidad de respetar la posición geográfica de las distintas comunidades o ciudades autónomas. De hecho, podríamos representar este mismo grafo de muchas formas diferentes y seguiría siendo el mismo grafo. Siempre que, claro está, respetemos las relaciones de frontera en los vértices (los puntos que representan a las ciudades y comunidades autónomas). En el capítulo 14, «Joker», hablaremos con más detalle y tranquilidad sobre la importancia que puede tener, en algunas aplicaciones concretas, el dibujo que hagamos del grafo que modela esa aplicación, pero, de momento, digamos que no nos preocupa el dibujo de nuestro grafo, solo nos importan las relaciones entre sus vértices.



Estos objetos, los grafos, tan monos y en apariencia tan simples, nos proporcionan unas herramientas matemáticas muy potentes para resolver problemas reales de gran complejidad y con infinitud de aplicaciones. Como estamos empezando este libro y quiero que me acompañes hasta el final para que no te pierdas la oportunidad de descubrir la belleza de la Teoría de Grafos, vamos a comenzar con un ejemplo simple de aplicación de grafos para resolver un acertijo que, espero, podrás compartir con amigos y familiares cuando la conversación se torne tensa sobre algún tema espinoso.

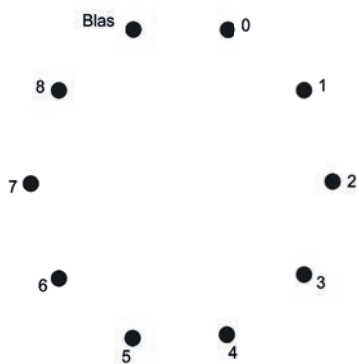
Alicia y Blas son pareja y han quedado para cenar con otras cuatro parejas en un restaurante. Al llegar a la cena, todos llegan con su pareja y los asistentes se saludan al verse: algunos se dan cordialmente la mano, otros se saludan con dos besos. Tras los postres, Blas propone a sus nueve compañeros de mesa que escriban en un trocito de papel a cuántas personas les dieron la mano al llegar al restaurante. Recordemos que todos se saludaron, pero usaron dos tipos de saludo: mano o besos. Los compañeros acceden y le dan a Blas los nueve papelitos, cada uno con un número: el número de personas a las que saludaron con un apretón de manos al llegar. Blas, sin abrirlos, los mezcla y después los abre y los coloca sobre la mesa. Casualmente, las nueve respuestas son distintas, no se repite ningún número. La pregunta que te hago es la siguiente: ¿a cuánta gente le dio la mano Alicia al llegar?

Lo sé. En principio podría parecer que es algo imposible de saber a partir de los datos de que disponemos, pero no. Está todo escrito en el párrafo anterior. Solo se trata de «exprimir» toda la información que poseemos, de ensamblar

como detectives todas las pistas que tenemos para responder a la pregunta. Y, claro, de usar un grafo, porque aquí hemos venido a hablar de grafos.

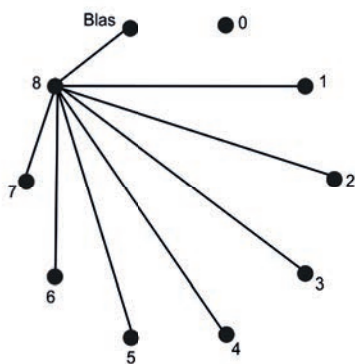
La primera pista que tenemos es que las nueve respuestas eran diferentes. Intentemos adivinar cuáles fueron esas respuestas. ¿Pudo alguien escribir, no sé, 11 en su trocito de papel? Evidentemente no, porque eran solo 10 amigos. Por lo tanto, el número más alto que podría aparecer en esos papelitos es el 9. ¿Y el más pequeño? Podemos deducir sin dificultad que el más pequeño puede ser 0, que correspondería a una persona que saludó a todos con dos besos. Luego, en principio, las respuestas posibles serían  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ . Esas son 10 posibles respuestas, pero solo tenemos 9 papelitos. Un momento: leamos de nuevo el acertijo. Llegaron en pareja. Eso significa que, al verse, como máximo saludaron a 8 personas. Nadie saluda a su pareja al llegar si viene con ella: la trae saludada de casa. O no. Pero, desde luego, no la saluda si llega con ella. Este pequeño detalle nos viene muy bien porque reduce el conjunto de respuestas posibles a  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ , o sea, ya sabemos qué números había en los papelitos.

Ahora vamos a plasmar esta información en un grafo. Los vértices serán 10, uno por cada asistente. Solo tenemos identificado a Blas; al resto lo etiquetamos con uno de los números que aparecen en los trocitos de papel. Se trata, pues, de averiguar detrás de qué número se encuentra Alicia.



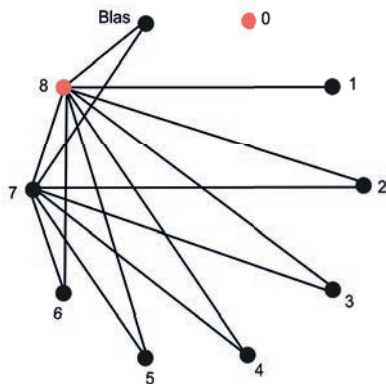
Ahora vamos a dibujar las aristas del grafo. Estas aristas unirán dos vértices entre sí si se dieron la mano. Por lo tanto, salvo para el vértice que corresponde a Blas, sabemos cuántas aristas saldrán de cada uno de los otros 9 vértices: del 0 no saldrá ninguna, del 1 saldrá una, etc.

Comencemos a pintar estas aristas colocando en primer lugar las que salen del vértice 8. Tienen que salir 8 aristas a 8 vértices y, sin contar el vértice 8, nos quedan 9. Pero bueno, sabemos que al 0 no llega ninguna, y ya lo tenemos: el 8 les dio la mano a todos menos al 0.

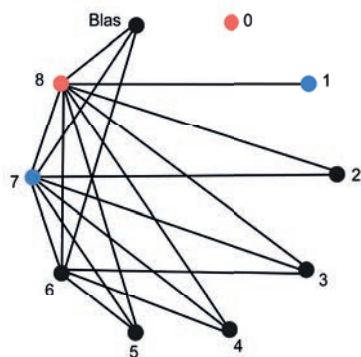


¿Qué podemos deducir del hecho de que el 8 saludara a todos menos al 0 con un apretón de manos? Efectivamente, que el 8 y el 0 son pareja. La pareja del 8 es una de las personas a las que no le dio la mano, y la única opción es el 0. ¡Ea!, pues ya tenemos identificada a una de las parejas y a dos sospechosos menos de ser Alicia.

Seguimos ahora con el vértice 7, del que tienen que salir 7 aristas. Lo tenemos fácil, porque quitando al 0 y al 1, que ya no pueden recibir más aristas, nos quedan 7 candidatos para ser saludados con un apretón de manos por el 7. A uno de ellos ya lo habíamos unido, al 8.

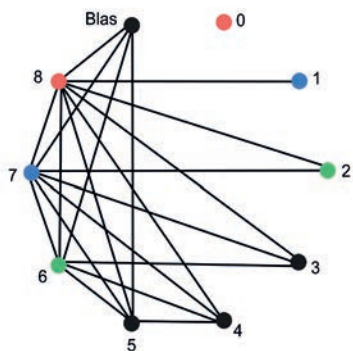


Como la pareja del 7 está entre las personas a las que este vértice no les dio la mano y el 7 se la dio a todas menos al 0 y al 1, podemos deducir que 1 y 7 son pareja. El 0 es la pareja del 8. Pues nada, dos sospechosos menos de ser Alicia. Seguimos con el 6 y repetimos el proceso: el 6 se podrá unir con todos menos con el 0, el 1 y el 2, porque estos tres ya tienen dibujadas las aristas que les corresponden.

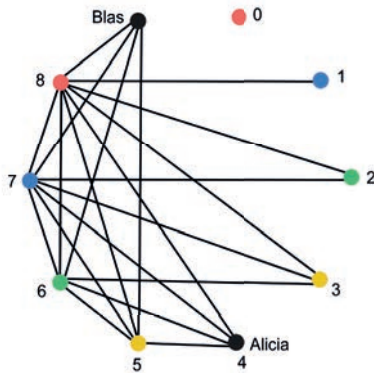


Al igual que en los casos anteriores, como la pareja del vértice 6 se encuentra entre los vértices a los que no les dio la mano, la única opción es el 2. Tenemos identificada una nueva pareja y hemos eliminado a dos nuevos sospechosos, el 2 y el 6.

Aunque supongo que ya intuyes quién es Alicia, vamos a terminar de dibujar nuestro grafo añadiendo las aristas que salen del 5 y que pueden unirlo a todos los vértices menos al 0, al 1, al 2 y al 3, porque estos ya tienen las aristas que les corresponden.



Pues ya lo tenemos: el 5 es la pareja del 3, es el único libre de entre todos los que no saludó con un apretón de manos y, por lo tanto, ya hemos desenmascarado a Alicia. Estaba escondida en el vértice 4 y dio la mano a 4 personas al llegar.



Sorprendente, ¿no? Un rompecabezas que en principio parecía muy complicado y que se resuelve de forma simple, y sobre todo muy elegante, sin más que modelar la situación usando un grafo. Bueno, ya te prometí que los grafos son una herramienta muy potente para eso: modelar y resolver problemas de manera eficiente e intuitiva.

Pero, ¡un momento! ¿Te has fijado en los resultados finales de los saludos con apretón de manos? Alicia y Blas han saludado, los dos, a 4 personas cada uno. Qué casualidad, ¿no? Ellos sí han coincidido. ¿Será que son una pareja mejor avenida que las otras cuatro? ¿Cuál será el secreto de su amor? Espera, espera, ¿no será alguna propiedad de los grafos que no conocemos?

No te pierdas el próximo capítulo para salir de dudas.

## 2

# LA VERBENA DE LA PALOMA

Fiestas, palomas, palomares, estrellas  
y una historia de amor con un final feliz.  
Estos son los ingredientes de esta verbena en la que  
vamos a empezar a llamar las cosas por su nombre.  
Suena la música y los grafos van saliendo  
a la pista. ¿Bailas conmigo?

**E**n el capítulo anterior nos despedimos con el descubrimiento de que Alicia y Blas habían saludado con un apretón de manos al mismo número de personas al llegar a la cena, y nos preguntábamos —o me pregunté— si aquella sincronización era consecuencia de un amor bien llevado o simplemente derivaba de alguna propiedad de los grafos. En este capítulo desvelaremos ese misterio y aprenderemos muchas más cosas sobre grafos, claro, sobre más fiestas y sobre lo que podemos aprender contando palomas.

A estas alturas ya sabemos que un grafo es un objeto (precioso) que está formado por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas (que representan a parejas de vértices). Pero vamos a definir algunos conceptos asociados a los grafos que,